Nome, Cognome, Matricola:

Tempo a disposizione: 90 minuti

ESERCIZI

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = y(x - y^2)^2$$

Allora f ammette

$\boxed{\text{A}}$: un punto di massimo relativo, infiniti punti di sella e infiniti punti di minimo relativo $\boxed{\text{B}}$: un punto di minimo relativo, infiniti punti di sella e infiniti punti di massimo relativo $\boxed{\text{C}}$: un punto di minimo relativo, un punto di sella e infiniti punti di massimo relativo $\boxed{\text{D}}$: un punto di massimo relativo, un punto di sella e infiniti punti di minimo relativo $\boxed{\text{E}}$: un punto di sella, infiniti punti di massimo relativo e infiniti punti di minimo relativo

Punteggio: 7

2. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ dato da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2 \le 2 - x^2 - y^2,\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}.$$

Allora l'integrale triplo

$$\iiint_V \frac{xyz}{x^2 + y^2}\, dxdydz$$

vale

$\boxed{\text{A}}$: 1 $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{8}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{16}$

Punteggio: 7

3. Data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}\,x}{1 + n^2x^2}, \qquad x \in [0, +\infty),$$

(a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;

(b) stabilire se la successione converge uniformemente in I;

(c) stabilire se la successione $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in I.

Punteggio: 6

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1.

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $n \in \mathbb{N}$ e $f_n : I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) Se esiste $x_0 \in I$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x_0)|$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ non converge totalmente in I.

(b) Se f_n sono continue in I per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in I, allora

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx\,,$$

per ogni intervallo $[a, b] \subset I$.

(c) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente in I, allora la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero uniformemente in I.

Punteggio: 6

Domanda 2. Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e $\vec{x}_0 \in A$.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) Se $f \in C^0(A)$ e $\vec{x}_0$ è un punto di estremo relativo per f allora $\vec{x}_0$ è un punto stazionario.

(b) Se $f \in C^1(A)$ allora vale la formula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} \quad \text{per ogni versore } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

(c) Se $f \in C^2(A)$ allora la matrice Hessiana di f calcolata in $\vec{x}_0$ è una matrice simmetrica.

Punteggio: 6
